

Dans cette séance on va voir

OS.11

- (i) formule de changement de base
- (ii) exemples sur matrices de passage et matrices d'app. lin.
- (iii) la notion de valeur propre et vecteur propre

§8.3. Formule de changement de base

Set-up $T: V \rightarrow V'$ app. lin.
 $\begin{matrix} \nearrow & \nwarrow \\ B & B' \\ \text{deux bases} \end{matrix}$

Question: Comment calculer $[T]_{B' \leftarrow B}$ si on connaît $[T]_{B \leftarrow B}$??

Rép: Utiliser les matrices de passage!

Formule de changement

$$[T]_{B' \leftarrow B} = P_{B' \leftarrow B} [T]_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow B}$$

idée:

$$B' \leftarrow B = B' \leftarrow B \leftarrow B$$

(Preuve dans les notes)

Notation

$$S: V = V', \quad B = B' \quad \xrightarrow[\text{écrit plutôt}]{\text{on}} \quad [T]_{B' \leftarrow B}$$

Exemple 8.6*

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ abs}$$

$$B' = B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_{B' \leftarrow B} = [T] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

bases canoniques

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut

$$[T]_{B' \leftarrow \mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

base canonique

trajets?

calcul direct

$$[T]_{\mathcal{L}' \leftarrow \mathcal{L}} = P_{\mathcal{L}' \leftarrow B'} [T]_{B' \leftarrow B} P_{B \leftarrow \mathcal{L}}$$

$$P_{B' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{\text{rep.}}} P_{\mathcal{E}' \leftarrow B'} = P_{B' \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2d-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \xrightarrow{=} \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix} \square$

Exemple 8.5*

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ bases of } \mathbb{R}^3$$

Calculer (i) $[T] \stackrel{\text{def}}{=} [T]_{B_{can} \leftarrow B_{can}}$

(ii) $P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}}$ et $P_{\mathcal{E} \leftarrow B_{can}}$

(iii) $[T]_{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} [T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$

(i) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{E} \leftarrow B_{can}} = P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Alors

$$[T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow B_{can}} [T] P_{B_{can} \leftarrow \mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$